Résumé 17 : polynomes d'endomorphismes

Dans tout ce cours E sera un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

I Le polynôme caractéristique

u est ici un endomorphisme de E. J'ai pensé que ces rappels ne seraient pas inutiles.

Définition I.1 (*Polynôme caractéristique d'un endomorphisme*)

Le polynôme caractéristique de u est défini par :

$$\chi_u(X) = \det(X Id_E - u) = (-1)^n \det(u - X Id_E).$$

Les racines de χ_u sont les valeurs propres de u. Pour toute valeur propre λ de u, on note Mult(λ) la multiplicité de λ en tant que racine de χ_u.

Proposition I.2 (*Propriétés du polynôme caractéristique*)

1. *χ_u est un polynôme unitaire de degré n.*
2. $\chi_u(X) = X^n + (-1)^{n-1}\text{Trace}\,(u)X^{n-1} + \ldots + (-1)^n \det u$
3. *Pour toute valeur propre λ de u, on a $1 \leqslant \dim(E_\lambda) \leqslant \text{Mult}_\chi(\lambda)$.*

Remarques :

1. Si $\dim E = 2$, alors $\chi_u(X) = X^2 - \text{Trace}\,(u)X + \det u$.
2. Si u est un projecteur de rang r, alors $\chi_u(X) = (X-1)^r X^{n-r}$.
3. Il faudrait savoir calculer le polynôme caractéristique d'un matrice compagnon.

Théorème I.3 (*Critère assurant qu'un endomorphisme est diagonalisable*)

u est diagonalisable si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *le polynôme caractéristique de u est scindé*
2. $\forall \lambda \in Sp(u), \text{Mult}_\chi(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$.

Proposition I.4 (*Cas particuliers*)

1. *Si λ est une racine simple du polynôme caractéristique alors $\dim E_\lambda = \text{Mult}(\lambda) = 1$. Les racines simples ne nécessitent aucune vérification lorsque l'on souhaite s'assurer qu'un endomorphisme est diagonalisable.*
2. ***Si** le polynôme caractéristique est scindé et à racines simples **alors** u est diagonalisable et les espaces propres sont des droites.*

II Polynômes d'endomorphismes et de matrices

§ 1. ***Autour de la sous-algèbre* $\mathbb{K}[u]$.–** ou $\mathbb{K}[M]$ si M est une matrice carrée ;

Définition II.1

Soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_m X^m \in \mathbb{K}[X]$, et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note $u^k = \underbrace{uo\ldots ou}_{k \text{ fois}}$ et $u^0 = Id_E$.*
2. *On définit $\boxed{P(u) = a_0 Id_E + a_1 u + \ldots + a_m u^m = \sum_{k=0}^{m} a_k u^k.}$*

   $P(u)$ est un <u>endomorphisme de E</u>, comme u.
3. *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit la matrice*

$$P(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_n A^n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

Remarques :

ATTENTION : Soit x un vecteur de E. $P(u)(x)$ est un vecteur, mais

$P\big(u(x)\big)$ N'A PAS DE SENS.

De même, si X est un vecteur colonne de taille n, $P(A)X$ est un vecteur colonne de taille n mais $P(AX)$ n'a pas de sens.

Propriétés II.2

L'application $\Phi_u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ P(X) & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$ *est un morphisme d'algèbres.*

En particulier, cela signifie que $\underbrace{(PQ)}_{\text{loi } \times}(u) = \underbrace{P(u) \circ Q(u)}_{\text{loi } \circ}$.

Proposition II.3

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$, A et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, P et $Q \in \mathbb{K}[X]$.

1. *Les polynômes en* u *commutent :* $P(u)oQ(u) = (P \times Q)(u) = Q(u)oP(u)$.
2. *Les polynômes en* A *commutent :* $P(A) \times Q(A) = (P \times Q)(A) = Q(A) \times P(A)$.
3. *Soit* H *une matrice carrée inversible.*
   (a) *Si* $k \in \mathbb{N}$, *alors* $H^{-1}A^kH = (H^{-1}AH)^k$.
   (b) $H^{-1}P(A)H = P(H^{-1}AH)$.
   (c) *Si* A *et* B *sont semblables alors* $P(A)$ *et* $P(B)$ *aussi.*
   (d) *Si* A *est diagonalisable alors* $P(A)$ *est diagonalisable.*
   (e) $P({}^tA) = {}^t\big(P(A)\big)$ *et* $\overline{P(A)} = \overline{P}(\overline{A})$.

Proposition II.4 (*Lien entre le spectre de u et le spectre de $P(u)$*)

Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ *et* $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. *Soient* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $x \in E$. *Si* $u(x) = \lambda x$ *alors* $P(u)(x) = P(\lambda)\, x$.
2. *Si* $\lambda \in Sp(u)$ *alors* $P(\lambda) \in Sp(P(u))$.

§ 2. ***Le polynôme minimal*** μ_u.– En utilisant le fait que tous les anneaux de $\mathbb{K}[X]$ sont principaux, nous montrons :

Définition II.5

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, *où* E *est de dimension finie. Il existe un unique polynôme* μ_u ***unitaire*** *de* $\mathbb{K}[X]$ *tel que* $\ker \Phi_u = \pi_u \mathbb{K}[X]$. *Ce polynôme est appelé* ***polynôme minimal de*** u.

En clair, cela signifie :

Propriétés II.6 (*de μ_u*)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ *non nul.*

1. *Le polynôme minimal de* u *est* ***LE*** *polynôme unitaire de degré minimal parmi tous les polynômes annulateurs de* u.
2. *Pour tout* $P \in \mathbb{K}[X]$, P *annule* $u \iff \mu_u$ *divise* P.
3. μ_u *est degré* $\geqslant 1$, *et ce degré est* 1 *si et seulement si* u *est une homothétie.*

EXEMPLES :

1. Si u est une projection autre que $\mathscr{O}_{\mathscr{L}(E)}$ et Id_E, alors $\mu_u(X) = X^2 - X$.
2. Si $d \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent d'indice k, alors $\mu_d(X) = X^k$.

Jetons un oeil à l'image de Φ_u :

Propriétés II.7 (*de Im Φ_u*)

$\mathbb{K}[u] = \{P(u)$ *où* $P \in \mathbb{K}[X]\} =$ *Vect* $(u^k, k \in \mathbb{N})$.
Notons $d \in \mathbb{N}^*$ *le degré de* μ_u. $\mathbb{K}[u]$ *est une algèbre de dimension* d, *dont* $\left(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{d-1}\right)$ *est une base.*

Enfin, notons l'existence d'un polynôme annulateur remarquable.

Théorème II.8 (*Cayley-Hamilton*)

Soit u *un endomorphisme de* E. *Le polynôme caractéristique de* u *est un polynôme annulateur de* u. *Ainsi,*

- μ_u *divise* χ_u.
- $\deg \mu_u \leqslant n$.

III L'apport de $\mathbb{K}[u]$ aux questions spectrales

Proposition III.1 (*Polynôme annulateur et spectre de u*)

Soit P un polynôme annulateur de u : $P(u) = \mathcal{O}_{\mathscr{L}(E)}$.

1. ***Si** λ est une valeur propre de u **alors** $P(\lambda) = 0$.*
2. *Si P est un polynôme annulateur de u alors les valeurs propres de u sont à rechercher **parmi** les racines de P.*
3. *Les valeurs propres de u sont **exactement** les racines de μ_u.*

Lemme 1 (*théorème de décomposition des noyaux*)

Soient $P_1, \dots, P_r \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes premiers entre eux deux à deux. Alors

$$\ker\Big(P_1P_2\dots P_r\Big)(u) = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker P_k(u).$$

En particulier, si de plus $P(X) = P_1(X)P_2(X)\dots P_r(X)$ annule u, alors

$$\bigoplus_{k=1}^{r} \ker P_k(u) = E.$$

Théorème III.2 (*Critère pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable*)

Soit u un endomorphisme de E. On a l'équivalence entre les prédicats suivants :

1. *u est diagonalisable,*
2. *Il existe un polynôme P scindé et à racines simples qui annule u.*
3. *μ_u est scindé à racines simples.*

Dans ce cas, si $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u, on a

$$\mu_u(X) = \prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i).$$

Corollaire III.3 (*Endomorphisme diagonalisable et sous-espace vectoriel stable*)

*Soit u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel **stable** par u.
Notons $u_F \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}\right.$ l'endomorphisme induit par u sur F. Alors*

(i) *Le polynome minimal de u_F divise celui de u.*

(ii) *Si u est diagonalisable alors u_F aussi.*

Corollaire III.4 (*Diagonalisation simultanée*)

Si u et v sont deux endomorphismes de E qui commutent, alors ils diagonalisent dans une même base, i.e il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!], e_i$ est un vecteur propre de u et de v.

IV Endomorphisme trigonalisable

Définition IV.1 (*Endomorphismes trigonalisable*)

*Soit u un endomorphisme de E.
u est trigonalisable lorsqu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.*

Théorème IV.2 (*Critère assurant qu'un endomorphisme est trigonalisable*)

On a équivalence entre les trois assertions suivantes :

1. *u est trigonalisable*
2. *Son **polynôme caractéristique** est scindé.*
3. *u annule un polynome scindé.*
4. *μ_u est scindé.*

Corollaire IV.3

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est trigonalisable, il existe une famille $C_1, \dots, C_r$ de sous-espaces vectoriels de E tels que

(i) $C_1 \oplus \cdots \oplus C_r = E$.

(ii) Chaque C_i est stable par u.

(iii) L'endomorphisme induit par u sur C_i est la somme d'un nilpotent et d'une homothétie

Ainsi, u est la somme d'un endomorphisme nilpotent n et d'un endomorphisme diagonalisable d tel que $d \circ n = n \circ d$.

V Les figures imposées

Exercices :

CCP 94 : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
On notera Id l'application identité sur E.

1. Montrer que $\mathrm{Im}u \oplus \ker u = E$.
2. (a) Énoncer le lemme des noyaux pour deux polynomes.
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}u = \ker(u^2 + u + \mathrm{Id})$.
3. On suppose que u est non bijectif.
   Déterminer les valeurs propres de u. Justifier la réponse.

Exercices :

CCP 91 : On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercices :

CCP 65 : Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que :
$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)\ .$$
2. (a) Démontrer que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que pour tout $(P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$:
$$(P \text{ annule } u) \Rightarrow (PQ \text{ annule } u)$$
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ecrire le polynôme caractéristique de A, puis en déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est un polynôme annulateur de A.

Exercices :

CCP 70 :
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?
2. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ et $B = aI_3 + bA + cA^2$, où I_3 désigne la matrice identité d'ordre 3. Déduire de la question **1.** les éléments propres de B.